Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
Prof. Dr. Ulrik Brandes / Dr. Sabine Cornelsen

Letztes Übungsblatt

Ausgabe: 6. Juli 2004 **Abgabe:** 14. Juli 2004, 12 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 1: 4 Zusatzpunkte

Betrachten Sie die *Schwerpunkts*-Methode für das Zwei-Lagen-Kreuzungsminimierungsproblem eines Graphen $G = (V, E)$ mit Partition L_1, L_2 von V und einer festen Anordnung π_2 von L_2. Sei dazu $x(v) = i$, falls v der i-te Knoten in π_2 ist. Für π_1 werden die Knoten $u \in L_1$ entsprechend den Werten

$$\frac{1}{d_G(u)} \sum_{v:\{v,u\} \in E} x(v)$$

sortiert. Zeigen Sie, dass die Schwerpunkts-Methode eine kreuzungsfreie Zeichnung liefert, falls es eine kreuzungsfreie Zwei-Lagen-Zeichnung mit der festen Anordnung π_2 auf L_2 gibt.

Aufgabe 2: 4 Zusatzpunkte

(a) Sei $A[1 \dots n]$ ein Feld mit n paarweise verschiedenen Zahlen. Ein Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$ heißt *Inversion*, wenn $A[i] > A[j]$. Schreiben Sie einen Algorithmus, der die Anzahl der Inversionen für n Zahlen mit einer Laufzeit in $O(n \log n)$ bestimmt.

Hinweis: Modifizieren Sie einen geeigneten Sortieralgorithmus wie etwa Mergesort.

(b) Gegeben sei ein einfacher, bipartiter Graph $G = (V, E)$, dessen Knoten gemäß der Bipartition auf zwei parallele Geraden verteilt sind. Die Knoten seien wie immer disjunkt und die Kanten geradlinig gezeichnet. Schreiben Sie einen Algorithmus, der die Anzahl der Kreuzungen in einer Laufzeit $O(|E| \log |V|)$ bestimmt. Begründen Sie, warum es nicht möglich ist, mit dieser Worst-Case-Laufzeit die Kreuzungen (als Paare von Kanten, die sich kreuzen) auszugeben.

Aufgabe 3: 4 Zusatzpunkte

Sei $L(G)$ die Laplace'sche Matrix zu einem Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten und sei $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass genau dann

$$L(G) \cdot x = \mathbf{0}$$

gilt, wenn

$$x_u = x_v$$

für alle $u, v \in V$, die in der selben Zusammenhangskomponente liegen, gilt.

[bitte wenden]

Aufgabe 4: **4 Zusatzpunkte**

Sei $\lambda_2(G)$ der zweitkleinste Eigenwert der Laplace'schen Matrix eines Graphen $G = (V, E)$.

(a) Zeigen Sie, dass
$$\lambda_2(G) \leq \lambda_2(G - S) + |S|$$
für eine Teilmenge $S \subset V$ gilt. Dabei bezeichne $G - S$ den Graphen, der aus G entsteht, indem alle Knoten aus S gelöscht werden.

(b) Folgern Sie, dass $\lambda_2(G)$ immer eine untere Schranke für den Knotenzusammenhang eines nicht vollständigen Graphen G ist.