Universität Konstanz
Fachbereich Informatik & Informationswissenschaft
Prof. Dr. Ulrik Brandes / Dr. Sabine Cornelsen

9. Übungsblatt

Ausgabe: 15. Juni 2004 **Abgabe:** 23. Juni 2004, 12 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Zeigen Sie: In einer planaren orthogonalen Zeichnung eines Graphen G mit der minimalen Anzahl von Knicken gibt es keine Kante von G, die sowohl $\frac{\pi}{2}$-Knicke als auch $\frac{3\pi}{2}$-Knicke hat.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Sei $D = ((V, A); \ell; u; b; \mathit{cost})$ ein allgemeines Flussmodell mit Kostenfunktion *cost* und sei x ein Fluss in D. Ein ungerichteter Kreis $C : v_0, \dots, v_\ell = v_0$ in D ist ein erhöhender Kreis bezüglich x genau dann, wenn für $i = 0, \dots, \ell - 1$ gilt

$$\begin{array}{ll} x(v_i, v_{i+1}) < u(v_i, v_{i+1}), & \text{falls } (v_i, v_{i+1}) \in A \\ x(v_{i+1}, v_i) > \ell(v_i, v_{i+1}), & \text{falls } (v_{i+1}, v_i) \in A. \end{array}$$

Gilt außerdem

$$\mathit{cost}(C) := \sum_{(v_i, v_{i+1}) \in A} \mathit{cost}(v_i, v_{i+1}) - \sum_{(v_{i+1}, v_i) \in A} \mathit{cost}(v_{i+1}, v_i) < 0,$$

so heißt C erhöhender Kreis mit negativen Kosten.

Zeigen Sie, dass x genau dann kostenoptimal ist, wenn es keinen bezüglich x erhöhenden Kreis mit negativen Kosten gibt.

Hinweis: Überlegen Sie für die Rückrichtung folgende Aussagen für zwei Flüsse x, x' auf D.

(a) Die Differenz $x' - x$ ist eine *Zirkulation*, d.h. für alle Knoten $v \in V$ gilt

$$\sum_{w:(v,w) \in A} \big(x'(v, w) - x(v, w)\big) = \sum_{w:(w,v) \in A} \big(x'(w, v) - x(w, v)\big) .$$

(b) Es gibt bezüglich x erhöhende Kreise $C_1, \dots, C_k$ und positive Zahlen $\delta_1, \dots, \delta_k$ mit

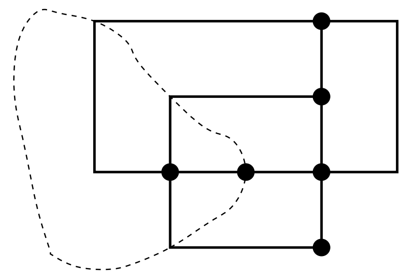
$$\mathit{cost}(x') - \mathit{cost}(x) = \sum_{i=1}^{k} \delta_i \, \mathit{cost}(C_i).$$

[bitte wenden]

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei Γ eine planare orthogonale Zeichnung eines Graphen G. Eine gerichtete einfache geschlossene Kurve C heißt *elementare Transformation* von Γ, wenn C Knoten von G nur dann schneidet, wenn C von einem Winkel, der größer als $\frac{\pi}{2}$ ist, in v hineinführt.

Für eine elementare Transformation C sei $L(C)$ die Anzahl der Kanten die C von einem $3\pi/2$-Winkel aus schneidet, $S(C)$ die Anzahl der Kanten, die C von einem $\pi/2$-Winkel aus schneidet und $G(C)$ die Anzahl der Kanten, die C von einem π-Winkel aus schneidet.



Im Beispiel rechts illustriert die gestrichelte Kurve im Gegenuhrzeigersinn durchschritten eine elementare Transformation und es gilt $L(C) = 1$, $S(C) = 2$ und $G(C) = 0$.

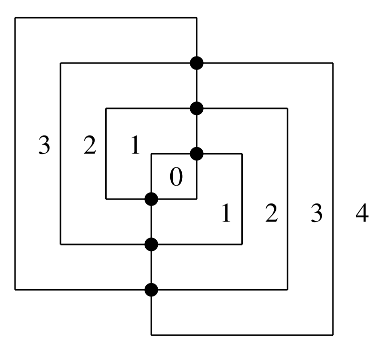
Zeigen Sie, dass eine planare orthogonale Zeichnung Γ genau dann eine knickminimale Zeichnung eines eingebetteten planaren Graphen mit Maximalgrad 4 ist, wenn es keine elementare Transformation C mit

$$G(C) + S(C) - L(C) < 0 \tag{1}$$

gibt.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Für gerades n, sei G_n der eingebettete Multigraph mit n Knoten, wie er im Bild für $n = 6$ dargestellt ist.



(a) Zeigen Sie, daß eine einbettungserhaltende orthogonale Zeichnung von G_n mindestens $2n + 4$ Knicke hat.

Hinweis: Betrachten Sie eine elementare Transformation C und benutzen Sie die in der Zeichnung angegebene Potentialfunktion auf den Facetten um zu argumentieren, dass C nicht die Ungleichung 1 erfüllen kann.

(b) Konstruieren Sie für gerades n einen einfachen eingebetteten Graphen mit n Knoten, der in jeder einbettungserhaltenden orthogonalen Zeichnung mindestens $2n - 2$ Knicke hat.