9. Übungsblatt

Ausgabe: 13. Juni 2002 **Abgabe:** 21. Juni 2002

Aufgabe 1: Zu einer Instanz von 3SAT mit Klauselmenge $C = \{c_1, \dots, c_n\}$, wobei $c_i = x_{i,1} \vee x_{i,2} \vee x_{i,3}$ und $x_{i,j} \in \{u_1, \dots, u_m, \overline{u_1}, \dots, \overline{u_m}\}$ für $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3$, wurde in der Vorlesung (Satz 4.17) ein Graph $G = (V, E)$ konstruiert:

- V besteht aus $3n$ Knoten $v_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3$
  (jeweils korrespondierend zu den Literalen $x_{i,j}$ aus C), und
- $\{v_{i,j}, v_{k,l}\} \in E$ genau dann, wenn $i \neq k$ und $x_{i,j} \neq \overline{x_{k,l}}$.

a) Geben Sie zur Klauselmenge $C = \{u_1 \vee u_2 \vee \overline{u_3},\ u_2 \vee \overline{u_3} \vee u_1,\ \overline{u_1} \vee u_3 \vee \overline{u_2}\}$ den zugehörigen Graph G an.

b) Bestimmen Sie in G eine Clique der Größe 3 und daraus eine erfüllende Belegung von C.

4 Punkte

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass das Problem CLIQUE $\in \mathcal{NP}$.
[Hinweis: Siehe Definitionen 4.9 und 4.16 sowie die Bemerkung und Beispiel TSP $\in \mathcal{NP}$ nach 4.9.] **4 Punkte**

Aufgabe 3: In der Vorlesung wurde gezeigt, daß 3SAT ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem ist. In dieser Aufgabe wird 2SAT $\in \mathcal{P}$ bewiesen. Bei 2SAT besteht jede Klausel aus genau *zwei* Literalen.

Gegeben sei eine Klauselmenge $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ für 2SAT, wobei $c_i = x_{i,1} \vee x_{i,2}$, mit $1 \leq i \leq n$. Aus C wird wie folgt ein gerichteter Graph G konstruiert:

(i) $V = \{x_{i,j}, \overline{x_{i,j}} : 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq 2\}$.
Pro Literal $x_{i,j}$ das in C vorkommt gibt es also zwei Knoten $x_{i,j}$ und $\overline{x_{i,j}}$ in G.

(ii) $E = \{(\overline{x_{i,1}}, x_{i,2}), (\overline{x_{i,2}}, x_{i,1}) :\ 1 \leq i \leq n\}$.
Pro Klausel $x_{i,1} \vee x_{i,2}$ in C gibt es also zwei Kanten in G.

a) Leiten Sie aus der logischen Äquivalenz $x_1 \vee x_2 \equiv (\overline{x_1} \rightarrow x_2) \wedge (\overline{x_2} \rightarrow x_1)$ die Idee der Konstruktion von G her. [Hinweis: $\rightarrow$ ist hier eine Implikation, d.h. $a \rightarrow b$ bedeutet „wenn a wahr ist, dann ist auch b wahr"]

b) Beweisen Sie, daß C genau dann erfüllbar ist, wenn es in C kein Literal $x_{i,j}$ gibt, für das in G sowohl ein gerichteter $(x_{i,j}, \overline{x_{i,j}})$-, als auch ein gerichteter $(\overline{x_{i,j}}, x_{i,j})$-Pfad existiert.

c) Geben Sie nun einen Algorithmus mit polynomialer Laufzeit an, der als Eingabe eine Klauselmenge C von 2SAT erhält und ausgibt, ob C erfüllbar ist oder nicht.

d) Welche Laufzeit hat Ihr Algorithmus? Begründen Sie Ihre Aussage.

8 Punkte