UNIVERSITÄT KONSTANZ
LEHRSTUHL FÜR PRAKTISCHE INFORMATIK
Dr. Ulrik Brandes / Prof. Dr. Vladimir Batagelj / Sabine Cornelsen

Methoden der Netzwerkanalyse
SS 2002

8. Übungsblatt

Ausgabe: 3. Juni 2002 **Abgabe:** 10. Juni 2002, 10 Uhr
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Zeigen Sie, daß $(\mathbb{R}_0^+, \max, \leq)$ ein kommutativer geordneter Monoid[1] ist.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Zeigen Sie, daß für eine symmetrische Funtion $d : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}_0^+$ folgendes gilt.

$$\text{ultrametrisch} \Rightarrow \text{Dreiecksungleichung} \Rightarrow \text{gerade} \Leftarrow \text{definit}$$

Aufgabe 3: **2 Zusatzpunkte**

Sei $s = \frac{a}{a+b+c}$ die nach Jaccard definierte Ähnlichkeit auf $\mathbb{B}^m$. Zeigen Sie, daß $d = 1 - s$ eine Metrik ist.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Zeigen Sie, daß die Kriterien $SS, S\overline{S}, SM, MS, M\overline{S}, MM$ α-sensitiv sind.

Aufgabe 5: **2 Zusatzpunkte**

Betrachten Sie den Fall von Ward's Kriterium, d.h. den Fall, daß P vom Typ SR ist, $[U] \subseteq \mathbb{R}^m, [F] = \mathbb{R}^m, w \equiv 1$ und $d(X,Y) = \sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2$ für $X, Y \in \mathbb{R}^m$. Sei $C \subset \mathbb{R}^m$ ein Cluster.

(a) Bestimmen Sie $\overline{C}$.

(b) Zeigen Sie, daß $p(C) := \sum_{X \in C} d(X, \overline{C}) = \frac{1}{2n_C} \sum_{X,Y \in C} d(X,Y)$ gilt.

[1] Ein Monoid $(G, +)$ ist eine „Gruppe ohne Inverse", d.h. $+ : G \times G \to G$ ist assoziativ und G enthält ein neutrales Element bzgl. $+$. $(G, +, \leq)$ ist ein geordneter Monoid, falls $(G, +)$ ein Monoid ist, $\leq$ eine lineare Ordnung ist und für alle $x, y, z \in G$ mit $x \leq y$ auch $x + z \leq y + z$ gilt.

[bitte wenden]

Aufgabe 6: **4 Punkte**

Betrachten Sie folgenden Algorithmus:

Eingabe : endl. Menge U, 'Unähnlichkeit' (dissimilarity) d auf U
Daten : Graph $G = (V, E)$, inizialisiert mit $V = U$ und $E = \emptyset$
Ausgabe: Eine reelle Zahl

Sortiere Paare $\{X, Y\} \subset U$ in nicht-aufsteigender Reihenfolge entsprechend d;
while *true* **do**
  Sei $\{X, Y\}$ das nächste Paar in der sortierten Folge;
  if $(U, E \cup \{X, Y\})$ *einen Kreis ungerader Länge enthält* **then**
    return $d(X, Y)$;
  $E \leftarrow E \cup \{X, Y\}$;

(a) Zeigen Sie, daß der Algorithmus den optimalen Wert des Clusterung-Problems (P_2, MM) berechnet.

(b) Erweitern Sie den Algorithmus so, daß er auch eine entsprechend optimale Clusterung liefert. Überlegen Sie sich außerdem, wann die optimale Clusterung eindeutig ist.

Aufgabe 7: **4 Zusatzpunkte**

Entwerfen Sie einen Algorithmus, der das Problem (P_k, ST) in polynomialer Zeit löst. Wann ist hier die Lösung eindeutig?

Aufgabe 8: **4 Punkte**

Das Problem MAX-CUT ist folgendermaßen definiert.

Eingabe: Ein ungerichteter schlichter Graph $G = (V, E)$, $c : E \to \mathbb{R}^+$
Zielfunktion: $F(C) = \sum_{\substack{\{x,y\} \in E \\ x \in C, y \in V \setminus C}} c(x, y)$ für $C \subset V$.
Ausgabe: Eine Teilmenge $\emptyset \subsetneq C \subsetneq V$, die F maximiert.

Zeigen Sie: MAX-CUT $\propto (P_2, SS)$.