

## 5. Übungsblatt

**Ausgabe:** 13. Mai 2002    **Abgabe:** 20. Mai 2002, 10 Uhr  
Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

### Aufgabe 1:

4 Punkte

Die *Spur* einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Diagonaleinträge. Sei  $A$  die Adjazenzmatrix eines schlichten ungerichteten Graphen  $G$ . Sei  $m$  die Anzahl der Kanten in  $G$  und  $t$  die Anzahl der Dreiecke, d.h. der Kreise der Länge drei, in  $G$ . Zeigen Sie, daß  $\text{Spur}A^2 = 2m$  und  $\text{Spur}A^3 = 6t$  gilt.

### Aufgabe 2:

4 Punkte

Sei  $G$  eine Gruppe und  $X \subseteq G$  eine Teilmenge. Der *Cayley-Graph*  $\mathcal{C}(G, X)$  zu  $(G, X)$  ist der Graph mit Knotenmenge  $G$  und Kantenmenge  $\{(g, h) \in G \times G; hg^{-1} \in X\}$ .

- (a) Zeigen Sie, daß es zu allen  $g, h \in G$  einen Automorphismus von  $\mathcal{C}(G, X)$  gibt, der  $g$  auf  $h$  abbildet. (**Hinweis:** Betrachten Sie Abbildungen  $x \mapsto xg$ ,  $g \in G$ .) Daraus folgt insbesondere, daß es nur einen normierten Knotenstrukturindex auf der Klasse der nicht-isomorphen Cayley-Graphen gibt.
- (b) Zeigen Sie, daß ein einfacher Kreis ein Cayley Graph ist.

### Aufgabe 3:

4 Punkte

Zeigen Sie, daß sich die Breitensuchnummern adjazenter Knoten eines ungerichteten Graphen höchstens um eins unterscheiden, d.h. daß

$$\{v, w\} \in E \implies |BFS(v) - BFS(w)| \leq 1.$$

[bitte wenden]

**Aufgabe 4:****4 Punkte**

Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt *bipartit*, wenn es eine Partition  $V = X \cup Y$  der Knotenmenge in zwei disjunkte Teilmengen  $X$  und  $Y$  gibt, so daß  $E \subseteq X \times Y \cup Y \times X$  ist.

- (a) Zeigen Sie, daß ein ungerichteter Graph genau dann bipartit ist, wenn er keine Kreise ungerader Länge enthält.
- (b) Bestimmen Sie Funktionen `ROOT`, `TRAVERSE` und `DONE` so, daß in einer Breitensuche getestet wird, ob ein zusammenhängender ungerichteter Graph bipartit ist.

**Aufgabe 5:****Keine Wertung**

Implementieren Sie eine Klasse `Breitensuche` und eine davon abgeleitete Klasse, die bestimmt, ob ein Multigraph bipartit ist. Können Sie den Algorithmus so erweitern, daß er ein *Zertifikat*, d.h. einen ungerichteten Kreis ungerader Länge bzw. eine entsprechende Partition der Knotenmenge, ausgibt?